Subnormalität in topologischen Gruppen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Helmut Pommer
aus Traiskirchen

1969

Subnormalität in topologischen Gruppen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Helmut Pommer
aus Traiskirchen

1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Februar 1969

Dekan: Prof. Dr. Helmut Blume

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Wielandt

2. Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Salzmann

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
Übersicht über die Ergebnisse	3
Bezeichnungen	5
Vorbemerkungen	6
§1 Das Erzeugnis abgeschlossen-subnormaler Untergruppen	7
§2 Vertauschbarkeit abgeschlossen-subnormaler Untergruppen	20
§3 Topologisch subnormale Untergruppen	32
§4 Topologische Subnormalität in kompakten Gruppen . .	42
Literaturverzeichnis	49

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543901_0009

Einleitung

Eine Untergruppe A einer Gruppe G heißt subnormal, wenn es eine absteigende Reihe (Subnormalreihe) $G = A_0 \trianglerighteq A_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq A_n = A$ von G nach A gibt. In topologischen Gruppen wird man naturgemäß fordern, daß die A_i (i=1,..,n) abgeschlossen sind. Solche Untergruppen nennen wir abgeschlossen-subnormal (asn-Untergruppen). Wenn man nicht nur endliche, sondern auch transfinite, absteigende Subnormalreihen in Betracht zieht, kommt man zu dem Begriff "topologisch subnormale Untergruppe" (tsn-Untergruppe). Topologische Subnormalität ist von Normalität so weit entfernt, daß es möglich ist, eine Gruppe mit einer echten Untergruppe zu finden, die topologisch subnormal und normalisatorgleich ist (Beispiel 4.10). Umso überraschender sind die beiden Hauptergebnisse dieser Arbeit:

In jeder topologischen Gruppe mit kompakter Zentrumsfaktorgruppe bildet die Menge aller tsn-Untergruppen einen vollständigen Teilverband des Verbandes der abgeschlossenen Untergruppen.

Wir nennen zwei kompakte Gruppen topologisch orthogonal, wenn das topologische Tensorprodukt $X/\overline{X'} \otimes_t Y/\overline{Y'}$ trivial ist. Zwei topologisch orthogonale tsn-Untergruppen einer kompakten Gruppe sind vertauschbar.
Beim Beweis dieser Sätze gehen wir so vor, daß wir zeigen:

a) Der Abschluß des Erzeugnisses beliebig vieler tsn-Untergruppen einer kompakten Liegruppe ist eine tsn-Untergruppe.
b) Zwei topologisch orthogonale tsn-Untergruppen einer kompakten Liegruppe sind vertauschbar.
Diese Sätze folgen aus der Untersuchung über asn-Untergruppen (§1 und §2); denn in kompakten Liegruppen ist jede tsn-Untergruppe eine asn-Untergruppe. Für kompakte Gruppen gewinnen wir dann diese Sätze mit Hilfe der Tatsache, daß jede Umgebung des Einselementes einer kompakten Gruppe einen abgeschlossenen Normalteiler enthält, dessen Faktorgruppe eine kompakte Liegruppe ist.
Für die weiteren Ergebnisse dieser Arbeit verweise ich auf die anschließende Übersicht.

Herrn Dr. Karl Heinrich Hofmann und vorallem Herrn Professor Dr. Helmut Wielandt danke ich für die Anregungen, die ich durch Gespräche und Vorlesungen erhalten habe.

Übersicht über die Ergebnisse

§1 Das Erzeugnis von asn-Untergruppen

Sei G eine topologische Gruppe; G erfülle die Maximalbedingung für asn-Untergruppen oder sei eine kompakte Liegruppe. Dann ist der Abschluß des Erzeugnisses beliebig vieler asn-Untergruppen von G eine asn-Untergruppe.
Der Index des Normalisators jeder asn-Untergruppe einer kompakten Liegruppe ist endlich.
In einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe ist jede asn-Untergruppe ein Normalteiler.

§2 Vertauschbarkeit von asn-Untergruppen

Zwei topologisch orthogonale asn-Untergruppen einer kompakten Gruppe sind vertauschbar

§3 Topologisch subnormale Untergruppen

Seien A und B tsn-Untergruppen von G. Wenn $B \leq \mathcal{N}_G(A)$ und B in einer kompakten asn-Untergruppe von G liegt, dann ist AB eine tsn-Untergruppe von G.
Wenn $A = \overline{A'}$ ist, und $\overline{\bigvee_{x \in G} B^x}$ kompakt ist, dann sind A und B vertauschbar und ihr Produkt ist topologisch subnormal in G.

§4 Topologische Subnormalität in kompakten Gruppen

Die Menge aller tsn-Untergruppen einer topologischen Gruppe mit kompakter Zentrumsfaktorgruppe ist eine vollständiger Teilverband des Verbandes aller abgeschlossenen Untergruppen.

Zwei topologisch orthogonale tsn-Untergruppen einer kompakten Gruppe sind vertauschbar.
Der Durchschnitt einer topologisch subnormalen Untergruppe A mit einer p-Sylowgruppe einer pro-endlichen Gruppe ist eine p-Sylowgruppe von A (siehe Def. 4.7).
Beispiel einer normalisatorgleichen tsn-Untergruppe.

Bezeichnungen

Stets sei $\mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, $\mathcal{O}$ die Klasse aller Ordinalzahlen .

Wenn G eine beliebige Gruppe ist, A, B, A_i $(i \in I)$ Untergruppen von G sind, dann sei:

$AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$,

$A \vee B =$ gp(A,B) = das Erzeugnis von A und B

$\bigvee_{i \in I} A_i = gp(A_i; i \in I)$

$[A,B] = gp\{a^{-1}b^{-1}a\ b \mid a \in A,\ b \in B\}$

$\mathcal{N}_G(A)$ = Normalisator von A in G

Z(G) = Zentrum von G .

Wenn G und G_i $(i \in I)$ topologische Gruppen sind (wir betrachten nur solche Gruppen, in denen einpunktige Mengen abgeschlossen sind), so sei:

$\overset{\circ}{G}$ = die Zusammenhangskomponente des Einselementes von G

$\prod_{i \in I} G_i$ = das direkte, topologische Produkt der Gruppen G_i

$G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n = \prod_{i \in I} G_i$, wenn $I = \{1, \ldots, n\}$ ist.

Vorbemerkungen

Eine Untergruppe A einer beliebigen Gruppe G heißt subnormal in G (in Zeichen: A sn G), wenn es eine endliche Subnormalreihe $G = A_0 \trianglerighteq A_1 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq A_n = A$ von G nach A gibt. Die Länge einer kürzesten Subnormalreihe von G nach A heißt der Defekt von A in G.

Für subnormale Untergruppen gilt der folgende Satz (die Punkte a) und c) stammen von Wielandt [14], Punkt b) von Robinson [10], d) und e) von Roseblade [11], [12]):

Satz 0: Sei G eine Gruppe. Dann gilt:

a) Der Durchschnitt zweier subnormaler Untergruppen von G ist subnormal in G.

b) Das Produkt zweier vertauschbarer subnormaler Untergruppen von G ist subnormal in G.

c) Wenn G die Maximalbedingung für subnormale Untergruppen erfüllt, dann ist das Erzeugnis beliebig vieler subnormaler Untergruppen von G subnormal in G.

d) Wenn G die Minimalbedingung für subnormale Untergruppen erfüllt, dann ist für jeden Subnormalteiler A von G der Index $|G : \mathcal{N}_G(A)|$ endlich.

e) Seien A und B subnormale Untergruppen von G. Das Tensorprodukt $A/A' \otimes B/B'$ der Kommutatorfaktorgruppen sei trivial. Dann sind A und B vertauschbar, d.h. AB = BA.

Diese Aussage werden wir nun in passender Form auf topologische Gruppen übertragen.

§1 Das Erzeugnis abgeschlossen-subnormaler Untergruppen

Def. 1.1: Eine Untergruppe A einer topologischen Gruppe G heißt abgeschlossen-subnormal in G (kurz asn-Untergruppe, in Zeichen: A asn G), wenn es eine endliche Kette $G = A_0 \trianglerighteq A_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq A_n = A$ gibt derart, daß A_i abgeschlossen ist in G (i=1,...,n). Die Länge einer kürzesten Subnormalreihe von G nach A mit dieser Eigenschaft heißt der topologische Defekt von A in G.

Lemma 1.2: Der Abschluß einer subnormalen Untergruppe einer topologischen Gruppe ist eine asn-Untergruppe.

Zum Beweis zeigen wir

Lemma 1.3: Seien A und B zwei Untergruppen einer topologischen Gruppe G, $A \trianglelefteq B$. Dann gilt:

1) $\overline{A} \trianglelefteq \overline{B}$

2) Wenn A abgeschlossen ist in G, dann ist auch $\mathcal{N}_G(A)$ abgeschlossen.

Beweis: Sei $x \in \overline{B}$, $a \in \overline{A}$, U eine beliebige Umgebung von $a^x = x^{-1}ax$. Zu zeigen ist, daß $A \cap U \neq \emptyset$ ist; denn dann ist $a^x \in \overline{A}$, also $\overline{A}^x = \overline{A}$, und damit $\overline{A} \trianglelefteq \overline{B}$.

Wegen der Stetigkeit der Gruppenoperationen gibt es zu x eine Umgebung V und zu a eine Umgebung W so, daß $a^x \in V^{-1}WV \subseteq U$ ist. Da x aus $\overline{B}$ ist, gibt es ein $b \in V \cap B$. Daher gilt $U \cap A \supseteq V^{-1}WV \cap A \supseteq W^b \cap A = W^b \cap A^b = (W \cap A)^b$. Da a in $\overline{A}$ liegt, ist $W \cap A \neq \emptyset$. Also ist $U \cap A \neq \emptyset$.

Wenn $A = \overline{A}$ ist, dann folgt aus Punkt 1), daß $A \trianglelefteq \overline{\mathcal{N}_G(A)}$ ist, also $\overline{\mathcal{N}_G(A)} \leq \mathcal{N}_G(A)$; daher ist $\mathcal{N}_G(A)$ abgeschlossen.

Beweis von Lemma 1.2: Sei A sn G und $G = A_0 \trianglerighteq A_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq A_n = A$ eine Subnormalreihe von G nach A. Dann ist die Kette $G = \overline{A}_0 \trianglerighteq \overline{A}_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq \overline{A}_n = \overline{A}$ eine Subnormalreihe abgeschlossener Untergruppen von G nach $\overline{A}$.

Korollar 1: A ist genau dann eine asn-Untergruppe von G, wenn A abgeschlossen und subnormal ist in G.

Korollar 2: Sei A asn G. Dann ist der Defekt d von A in G gleich dem topologischen Defekt d_t von A in G.

Beweis: Es ist klar, daß $d \leq d_t$ ist. Sei $G \trianglerighteq A_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq A_d = A$ eine kürzeste Subnormalreihe von A in G. Dann ist $G \trianglerighteq \overline{A}_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq \overline{A}_d = A$ eine Subnormalreihe abgeschlossener Untergruppen; daher ist $d \geq d_t$.

Satz 1.4: Sei G eine topologische Gruppe. Dann gilt:

a) Der Durchschnitt zweier asn-Untergruppen von G ist eine asn-Untergruppe von G.

b) Der Abschluß des Produktes zweier vertauschbarer asn-

Untergruppen von G ist eine asn-Untergruppe.

c) Wenn G die Maximalbedingung für asn-Untergruppen erfüllt, dann ist der Abschluß des Erzeugnisses beliebig vieler asn-Untergruppen von G eine asn-Untergruppe.

Beweis: a) und b) folgen aus Satz I und Lemma 1.2. Für den Beweis von c) folgen wir dem Beweis von Wielandt in [15,p.41] . Sei A_i asn G ($i \in I \neq \emptyset$), $J := \overline{\bigvee_{i \in I} A_i}$. Die Menge $\{ A \leq J \mid A \text{ asn } G \}$ ist nicht leer und besitzt daher nach Voraussetzung ein maximales Element M. Wir zeigen: $M \trianglelefteq J$. Angenommen, $M \not\trianglelefteq J$. Wenn $J = M_0 \triangleright M_1 \triangleright \ldots \triangleright L \triangleright N \triangleright M$ die Standardreihe von M in J ist (siehe [10]), dann ist $M \not\trianglelefteq L$. Daher gibt es ein $g \in L$ mit $M \neq M^g \lhd N^g = N$. Da M^g asn G ist, folgt daraus nach Punkt b): $\overline{MM^g}$ asn G und $\overline{MM^g} \leq J$. Wegen $M < \overline{MM^g}$ ist das ein Widerspruch zur Maximalität von M. Also ist $M \trianglelefteq J$. Daher ist für alle $i \in I$: $\overline{A_i M}$ asn G und $\overline{A_i M} \leq J$. Daraus folgt $\overline{A_i M} = M$, also $A_i \leq M$. Deshalb gilt: $J = \overline{\bigvee_{i \in I} A_i} \leq M \leq J$, folglich M = J. Da M asn G ist, ist J asn G.

Für den Rest dieses Paragraphen werden wir uns mit der Übertragung von Satz I,d beschäftigen. Dazu benötigen wir einige Hilfssätze.

Lemma 1.5: Sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer kompakten Gruppe G und $H \trianglelefteq K \leq G$. Dann ist der Zentralisator C von K/H in G abgeschlossen.

Beweis: Angenommen, $\overline{C} \setminus C \neq \emptyset$. Sei $y \in \overline{C} \setminus C$. Dann gibt es ein $k \in K$ mit $ykH \neq kyH$, also $ykH \cap kyH = \emptyset$. Da H abgeschlossen ist und G als kompakter Hausdorffraum normal ist ([9], S.88), gibt es eine offene Umgebung U des Einselementes so, daß $UykH \cap kUyH = \emptyset$ ist. Wegen $y \in \overline{C}$ ist $Uy \cap C \neq \emptyset$. Sei $x \in Uy \cap C$; dann gilt: $xkH = kxH$, und daher $xkH \subseteq UykH \cap kUyH$. Das ist ein Widerspruch zu $UykH \cap kUyH = \emptyset$.

Lemma 1.6: Wenn $A \leq N \trianglelefteq G$, und A eine bezüglich allen zweiseitig stetigen Automorphismen von N invariante Untergruppe ist, dann ist $A \trianglelefteq G$.

Beweis: Jedes $g \in G$ induziert auf N einen zweiseitig stetigen Automorphismus von N.

Lemma 1.7: Sei $G = G_1 \times \ldots \times G_r$ das direkte Produkt topologisch einfacher , nicht abelscher Gruppen (eine topologische Gruppe heißt topologisch einfach, wenn sie keinen nichttrivialen abgeschlossenen Normalteiler besitzt). Dann ist jeder abgeschlossene Normalteiler $N \neq 1$ von G direktes Produkt von gewissen G_i , $N = G_{i_1} \times \ldots \times G_{i_k}$.

Der Beweis dieses Lemmas geht analog dem Beweis von [13], Theorem 4.4, wenn man berücksichtigt, daß das Zentrum einer topologischen Gruppe abgeschlossen ist [9, S.149].

Lemma 1.8 [4 , p.65]: Jeder total unzusammenhängende Normal-

teiler einer zusammenhängenden Gruppe G liegt im Zentrum von G, ist also insbesondere abelsch.

Lemma 1.9: Sei A eine dichte Untergruppe von G, für alle $x \in A$ gelte die Gleichung: $x^n = 1$. Dann gilt diese Gleichung auch für alle $x \in G$.

Beweis: Sei $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis des Einselementes, $x \in G$. Es gibt zu jedem $U \in \mathcal{U}$ ein $V \in \mathcal{U}$ mit $x^n U \supseteq \underbrace{xV \ldots xV}_{n\text{-mal}}$. Da A in G dicht ist, gibt es ein $a \in xV \cap A$. Daher ist $1 = a^n \in x^n U$, also $x^n = 1$.

Lemma 1.10 [7, p. 51]: C sei eine kompakte Teilmenge, und B eine abgeschlossene Teilmenge einer topologischen Gruppe G. Dann sind CB und BC abgeschlossene Teilmengen von G.

Lemma 1.11: Kompakte, total unzusammenhängende Liegruppen sind endlich.

Beweis: Nach [5, S.6] ist die Zusammenhangskomponente des Einselementes einer Liegruppe offen.

Lemma 1.12 [5, S.72] (vergl. [4, p.92,94]): Abgeschlossene Untergruppen und Faktorgruppen nach abgeschlossenen Normalteilern einer Liegruppe sind Liegruppen.

Lemma 1.13 [5, S.65] (vergl. [4, p.114]): Es besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen den analytischen Untergruppen einer analytischen Gruppe einerseits und den Unteralgebren der zugehörigen Liealgebra andererseits.

Lemma 1.14: Die zu einer Liegruppe gehörige Liealgebra ist ein endlichdimensionaler Vektorraum [5, S.48].

Lemma 1.15: In einer kompakten Liegruppe bricht jede echt absteigende Kette abgeschlossener Untergruppen nach endlich vielen Schritten ab.

Beweis (mangels eines Zitats): Sei G eine kompakte Liegruppe, $A_0 > A_1 > \ldots$ eine absteigende Kette abgeschlossener Untergruppen von G. $\mathring{A}_k$ sei die Zusammenhangskomponente von 1 in A_k.

1) Wenn $\mathring{A}_k = \mathring{A}_{k+r}$ für alle $r \in \mathbb{N}$, dann bricht die vorgegebene Kette nach endlich vielen Schritten ab. Denn $A_k/\mathring{A}_k = A_k/\mathring{A}_{k+r}$ ist nach Lemma 1.12 eine kompakte, total unzusammenhängende Liegruppe, also nach Lemma 1.11 endlich. Wegen $|A_k : \mathring{A}_{k+r}| \geq |A_k : A_{k+r}|$ muß die Kette abbrechen.

2) Die echt absteigende Kette $\mathring{A}_0 > \mathring{A}_{n_1} > \mathring{A}_{n_2} > \ldots$ bricht nach endlich vielen Schritten ab. Denn dieser Kette entspricht nach Lemma 1.13 in der Liealgebra von G eine echt absteigende Kette von Unteralgebren, die wegen Lemma 1.14 nur endlich sein kann. Daher gibt es eine natürliche Zahl k so, daß $\mathring{A}_k = \mathring{A}_{k+r}$ für alle $r \in \mathbb{N}$ ist.

Nach 1) bricht also die Kette $A_0 > A_1 > \ldots$ nach endlich vielen Schritten ab.

Korollar: Jede kompakte Liegruppe erfüllt die Minimalbedingung für abn-Untergruppen.

Lemma 1.16: Sei G eine topologische Gruppe, F_G der Durchschnitt aller abgeschlossenen Untergruppen von G mit endlichem Index. Dann gilt(vergl.[11, p.134]):

1) F_G ist invariant bezüglich allen zweiseitig stetigen Automorphismen von G.

2) Wenn G die Minimalbedingung für abgeschlossene Normalteiler erfüllt, dann ist $|G : F_G|$ endlich.

Beweis: Aussage 1) ist klar. Für 2) genügt der Hinweis, daß jede abgeschlossene Untergruppe mit endlichem Index einen abgeschlossenen Normalteiler mit endlichem Index enthält.

Bemerkung: Wenn G eine kompakte Liegruppe ist, gilt $F_G = G^{\circ}$.

Wir haben jetzt alles beisammen, um den folgenden Satz beweisen zu können. Die Beweisidee stammt von Roseblade [11] .

Satz 1.17: Sei H eine asn-Untergruppe einer kompakten Lie-Gruppe G. Dann ist der Index $|G : \mathcal{N}_G(H)|$ endlich.

Beweis: Angenommen, es gebe eine kompakte Liegruppe G_o und eine asn-Untergruppe H_o von G_o mit $|G_o : \mathcal{N}_{G_o}(H_o)| = \infty$. Es gibt nach Lemma 1.15 in G_o eine abgeschlossene Untergruppe G, die minimal ist bezüglich der Eigenschaft, eine asn-Untergruppe zu besitzen, deren Normalisator unendlichen Index hat. H sei eine minimale asn-Untergruppe von G, und zwar minimal bezüglich der Eigenschaft, daß $|G : \mathcal{N}_G(H)| = \infty$ ist.

Setze $K := \overline{\bigvee_{x \in G} H^x}$. K ist der kleinste abgeschlossene Normalteiler von G, der H enthält. Wegen H asn G und $H < G$

ist K eine echte Untergruppe von G. Aus der Minimalität von G folgt daher, daß $|K : \mathcal{N}_K(H)|$ endlich ist. Nach Lemma 1.3 ist $\mathcal{N}_K(H)$ abgeschlossen in K. Also ist $F_K \leq \mathcal{N}_K(H)$. Daraus folgt, daß die von allen Kommutatoren $f^{-1}h^{-1}fh$ mit $f \in F_K$ und $h \in H$ erzeugte Untergruppe $[F_K, H]$ in H enthalten ist.

Da F_K invariant gegen zweiseitig stetige Automorphismen von K ist, gilt nach Lemma 1.6: $F_K \lhd G$. Aus $|K : F_K| < \infty$ folgt, daß die Faktorgruppe von G nach dem Zentralisator C von K/F_K eine endliche Gruppe ist; denn G/C ist eine Untergruppe der Automorphismengruppe von K/F_K. Nach Lemma 1.5 ist C eine abgeschlossene Untergruppe von G. Daher ist $F := F_G$ in C enthalten. Also gilt: $[F,K] \leq F_K$ und folglich $[[F,H],H] \leq H$. Daraus folgt $H \lhd H[F,H] \lhd FH$.

Angenommen, es sei $FH < G$. Nach Lemma 1.10 ist FH abgeschlossen in G und daher nach Satz 1.4 eine asn-Untergruppe von G. Da H asn FH ist, gilt wegen der Minimalität von G: $|FH : \mathcal{N}_{FH}(H)| < \infty$. Daraus ergibt sich wegen $|G : \mathcal{N}_{FH}(H)| \geq |G : \mathcal{N}_G(H)|$ ein Widerspruch zu $|G: \mathcal{N}_G(H)| = \infty$. Daher ist FH = G, also der Defekt von H in G gleich 2. Daraus folgt $H \lhd K$.

Wenn L ein echter, abgeschlossener Normalteiler von H ist, gilt wegen der Minimalität von H, daß $|G : \mathcal{N}_G(L)|$ endlich ist. Daraus folgt $F \leq \mathcal{N}_G(H)$. Da G = HF ist, ist $L \lhd G$. Sei Q der Abschluß des Erzeugnisses aller echten abgeschlossenen Normalteiler von H. Dann ist $Q \lhd G$, also $Q < H$ und H/Q eine topologisch einfache Gruppe. Wir wollen zeigen, daß $|G : \mathcal{N}_G(H)|$ endlich ist. Daher können wir

wegen $|G/Q : \mathcal{N}_{G/Q}(H/Q)| = |G : \mathcal{N}_G(H)|$ o. B.d.A. annehmen, daß $Q = 1$ ist. Wir betrachten zwei Fälle:

1) Sei H abelsch. Dann ist H eine zyklische Gruppe der Ordnung p (p eine Primzahl), also $H = \langle a \rangle$ mit $a^p = 1$. Denn wenn $\overset{\circ}{H}$, die Komponente des Einselementes in H, gleich 1 ist, dann ist H nach Lemma 1.11 endlich, hat also die angegebene Form; wenn aber $H = \overset{\circ}{H}$ ist, dann enthält H eine Torusgruppe [7,p.190]; jede Torusgruppe besitzt Torsionselemente, die dann, da H abelsch ist, einen abgeschlossenen , nicht trivialen Normalteiler von H erzeugen, im Widerspruch zur Einfachheit von H. Sei $K^* := \bigvee_{g \in G} H^g$. Da H einfach ist, ist K^* eingeschränktes direktes Produkt gewisser H^{g_i} $(i \in I)$. Daher ist K^* eine abelsche Gruppe vom Exponenten p. Daraus folgt nach Lemma 1.9 und [4,p.33], daß auch $K = \overline{K^*}$ eine abelsche Gruppe vom Exponenten p ist. Da K kompakt ist, ist daher nach [4,p.406] K ein direktes topologisches Produkt zyklischer Gruppen der Ordnung p. Da K als kompakte Liegruppe die Minimalbedingung für abgeschlossene Untergruppen erfüllt, ist K das direkte Produkt endlich vieler Faktoren. Also $K = \prod_{i=1}^{n} H^{g_i}$. Daher ist K endlich, insbesondere gibt es nur endlich viele verschieden Untergruppen von K. Also gibt es nur endlich viele Konjugierte zu H in G, d.h. $|G : \mathcal{N}_G(H)| < \infty$.

2) Sei H nicht abelsch.

a) H sei zusammenhängend. Dann ist $H \leq \overset{\circ}{K}$. Nach Lemma 1.6 ist $\overset{\circ}{K} \lhd G$. Daher ist $K = \overset{\circ}{K}$, also K zusammenhängend. Für alle $g \in G$ ist $H^g \lhd K$, und es gilt daher: $H^g \cap H = H$ oder gleich 1. Daher können wir eine Kette $H < H \times H^{g_1} < H \times H^{g_1} \times H^{g_2} < \ldots$

abgeschlossener Normalteiler von K konstruieren [9, S.139], Satz 13 . Da H zusammenhängend ist, ist auch $H \times H^{g_1} \times H^{g_2} \times \dots \times H^{g_n}$ zusammenhängend [4,p.63] . Dieser Kette von zusammenhängenden Untergruppen von K entspricht in der Liealgebra von K eine aufsteigende Kette von Unteralgebren. Nach Lemma 1.14 muß diese Kette nach endlich vielen Schritten stationär werden. Daraus folgt, daß es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt so, daß $\prod_{i=0}^{n} H^{g_i} = \overset{\circ}{K}$ ist. Da $K = \overset{\circ}{K}$ ist, gilt also: $K = \prod_{i=0}^{n} H^{g_i}$. Nach Lemma 1.7 folgt daraus, daß es nur endlich viele zu H konjugierte Untergruppen H^g ($g \in G$) gibt, also $|G : \mathcal{N}_G(H)| < \infty$.

b) Sei H total unzusammenhängend, also H endlich. Wenn $H \leq \overset{\circ}{K}$ ist, dann ist H nach Lemma 1.8 abelsch; daher muß $H \not\leq \overset{\circ}{K}$ sein. Da $H^g \cap \overset{\circ}{K} = 1$ ist für alle $g \in G$, und da $|K : \overset{\circ}{K}|$ endlich, ist $K = \overset{\circ}{K} \times H \times \dots \times H^{g_n}$. Wenn es ein $g \in G$ gäbe derart, daß $H^g \not\leq H \times \dots \times H^{g_n}$, dann wäre das Bild von H^g unter der Projektionsabbildung von K auf $\overset{\circ}{K}$ ein zu H isomorpher Normalteiler von K ; nach Lemma 1.8 wäre dann H abelsch. Daher gilt für alle $g \in G$: $H^g \leq H \times \dots \times H^{g_n}$. Daraus folgt wie oben, daß $|G : \mathcal{N}_G(H)|$ endlich ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 1.17': Sei G eine kompakte Liegruppe, A asn G. Dann ist $\overset{\circ}{G} \leq \mathcal{N}_G(A)$.

Beweis: Nach Lemma 1.3 ist $\mathcal{N}_G(A)$ eine abgeschlossene Untergruppe von G und hat nach Satz 1.17 endlichen Index. $\overset{\circ}{G}$ ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Untergruppen

von G mit endlichem Index, also $\mathring{G} \leq \mathcal{N}_G(A)$.

Korollar: Wenn G zusammenhängend ist, dann ist $A \trianglelefteq G$.

Satz 1.18: Sei G eine kompakte Liegruppe, A_i asn G ($i \in I$).

Dann ist 1) $A := \bigvee_{i \in I} A_i$ sn G

2) $\bar{A}$ asn G .

Beweis: Da $G/\mathring{G}$ eine endliche Gruppe ist, ist $A\mathring{G}/\mathring{G}$, das Erzeugnis der subnormalen Untergruppen $A_i\mathring{G}/\mathring{G}$, nach Satz I eine subnormale Untergruppe von $G/\mathring{G}$. Daher ist $A\mathring{G}$ sn G. Nach Satz 1.17' ist $\mathring{G} \leq \mathcal{N}_G(A_i)$. Daraus folgt $A \trianglelefteq A\mathring{G}$, also A sn G und $\bar{A}$ asn G.

Lemma 1.19: Sei $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis des Einselementes einer topologischen Gruppe G, $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von G.

Dann gilt: $\bigcap_{\mathcal{U}} AU = \bigcap_{\mathcal{U}} UA = \bar{A}$.

Beweis: Sei $x \in \bar{A}$, $U \in \mathcal{U}$; setze $V := U \cap U^{-1}$. Da $x \in \bar{A}$ ist, gibt es ein $a \in A \cap xV$. Daraus folgt: $a = xv$ für ein $v \in V$, also $av^{-1} = x$; daher ist $x \in AV^{-1} = AV \subseteq AU$. Folglich ist $x \in \bigcap_{\mathcal{U}} AU$, also $\bar{A} \subseteq \bigcap_{\mathcal{U}} AU$.

Angenommen, es gebe ein Element x von $\bigcap_{\mathcal{U}} AU \setminus \bar{A}$. Da $G \setminus \bar{A}$ offen ist, gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $xU \cap \bar{A} = \emptyset$. Sei $V \leq U \cap U^{-1}$, $V \in \mathcal{U}$. Wegen $x \in \bigcap_{\mathcal{U}} AU$ ist $x = av$ für ein $a \in A$ und ein $v \in V$. Daraus folgt: $a = xv^{-1} \in x(U \cap U^{-1}) \subseteq xU$. Daher ist $a \in xU$ im Widerspruch zu $xU \cap \bar{A} = \emptyset$.

Lemma 1.20: Seien $A,B,C \leq G$, A kompakt. Dann gilt:

1) $\overline{AB} = A \cdot \overline{B}$

2) Die Abbildung $\varphi = (x \longmapsto Ax): G \longrightarrow G:A$ ist abgeschlossen, d.h. das Bild jeder abgeschlossenen Menge von G unter φ ist abgeschlossen [4, p. 37]

3) $\varphi(\overline{B \vee C}) = \overline{\varphi(B) \vee \varphi(C)}$ für $A \trianglelefteq G$.

Beweis: Nach [4,p.33] ist $A \cdot \overline{B} \leq \overline{AB}$. Nach Lemma 1.10 ist $A \cdot \overline{B}$ abgeschlossen, also $\overline{AB} \leq \overline{A \cdot \overline{B}} = A \cdot \overline{B}$.

Da φ stetig ist und abgeschlossen, gilt $\varphi(\overline{B \vee C}) \leq \overline{\varphi(B \vee C)} \leq \overline{\varphi(\overline{B \vee C})} = \varphi(\overline{B \vee C})$, also $\varphi(\overline{B \vee C}) = \overline{\varphi(B \vee C)}$. Daraus folgt, da φ ein Homomorphismus ist, daß $\varphi(\overline{B \vee C}) = \overline{\varphi(B) \vee \varphi(C)}$ ist.

Lemma 1.21: Sei G eine kompakte Gruppe, U eine offene Umgebung von 1. Dann gibt es einen abgeschlossenen Normalteiler von G, der in U enthalten ist, und dessen Faktorgruppe G/N eine kompakte Liegruppe ist [7,p.99].

Satz 1.22: In einer zusammenhängenden kompakten Gruppe ist jeder abgeschlossene Subnormalteiler ein Normalteiler.

Beweis: Sei G eine zusammenhängende, kompakte Gruppe, A asn G, U eine offene Umgebung von 1, $N \leq U$ ein abgeschlossener Normalteiler von G so, daß G/N eine Liegruppe ist. Da G zusammenhängend ist, ist auch G/N zusammenhängend. Nach Lemma 1.20 ist AN/N asn G/N. Daraus folgt nach Satz 1.17': $AN/N \trianglelefteq G/N$, also $AN \trianglelefteq G$. Zu jedem

Element U einer Umgebungsbasis $\mathcal{U}$ von 1 gibt es ein N_U so, daß $N_U A \trianglelefteq G$. Daraus folgt: $\bigcap_{\mathcal{U}} AN_U \trianglelefteq G$, und nach Lemma 1.19 ist $A \leq \bigcap_{\mathcal{U}} AN_U \subseteq \bigcap_{\mathcal{U}} AU = \bar{A} = A$; daher ist $A = \bigcap_{\mathcal{U}} AN_U$, also $A \trianglelefteq G$.

§2 Vertauschbarkeit abgeschlossen-subnormaler Untergruppen

Def. 2.1: Zwei topologische Gruppen X und Y heißen topologisch orthogonal (in Zeichen: $X \perp_t Y$), wenn für jede topologische Gruppe Z und jede (bezüglich der Produkttopologie auf $X \times Y$) stetige, bilineare Abbildung f von $X \times Y$ in Z gilt: $f(X \times Y) = 1$ (f heißt bilinear, wenn f bezüglich beider Variabler ein Homomorphismus ist).

Lemma 2.2: Seien X und Y topologische Gruppen, $X \perp_t Y$; η sei ein stetiger Homomorphismus von X auf X^η. Dann ist $X^\eta \perp_t Y$.

Beweis: Sei g eine stetige bilineare Abbildung von $X^\eta \times Y$. Setze $f := ((x,y) \longmapsto g(x^\eta, y))$. Dann ist f als Hintereinanderausführung der stetigen Abbildungen $((x,y) \longmapsto (x^\eta, y))$ und g stetig und wegen der Bilinearität von g auch bilinear. Daher ist nach Voraussetzung f trivial, also auch g, d.h. $X^\eta \perp_t Y$.

Lemma 2.3: Seien G und B topologische Gruppen, A_i $(i \in I)$ Untergruppen von G und $A_i \perp_t B$, $A := \bigvee_{i \in I} A_i$. Dann ist

a) $A \perp_t B$

b) $\overline{A} \perp_t B$.

Beweis: a) Sei f eine stetige, bilineare Abbildung von $A \times B$. Die Einschränkung von f auf $A_i \times B$ ist stetig und bilinear. Sei $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ ein beliebiges Element von A, $b \in B$. Dann gilt: $f(a,b) = f(a_1 \cdot \ldots a_n, b) = f(a_1,b) \cdot \ldots f(a_n,b) = 1$. Also ist f trivial.

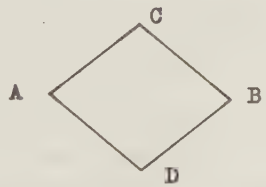
b) Sei jetzt f eine stetige, bilineare Abbildung von $\overline{A} \times B$ in eine topologische Gruppe Z, $\bar{a} \in \overline{A}$, $b \in B$. $U \leq Z$

sei eine beliebige Umgebung des Punktes $f(\bar{a},b)$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es eine Umgebung V von $\bar{a}$ so, daß $f(V,b) \subseteq U$. Da $\bar{a} \in \overline{A}$, gibt es ein $a \in A \cap V$. Nach a) ist $f(a,b) = 1$. Daher ist $1 \in U$. Da U eine beliebige Umgebung von $f(\bar{a},b)$ ist, muß $f(\bar{a},b) = 1$ sein. Also ist $\overline{A} \perp_t B$.

Lemma 2.4: Seien A und B Untergruppen einer topologischen Gruppe G. $[A,B]$ liege im Zentrum von $A \vee B$. Dann ist die Abbildung $f := ((a,b) \longmapsto a^{-1}b^{-1}a\,b)$ stetig und bilinear.

Beweis: Die Bilinearität von f rechnet man leicht nach. Sei U eine Umgebung von $a^{-1}b^{-1}a\,b$ in G. Da die Gruppenoperationen in G stetig sind, gibt es Umgebungen V von a und W von b derart, daß $V^{-1}W^{-1}V\,W \subseteq U$ ist. Daraus folgt $f(V \cap A, W \cap B) \subseteq U \cap [A,B]$, d.h. f ist stetig.

Definition 2.5: Seien A,B,C,D Untergruppen einer Gruppe und es gelte: $A,B \trianglelefteq C$; $C = AB$; $D = A \cap B$. Dann heißt die Figur

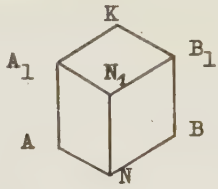


ein direktes Parallelogramm*. Eine aus direkten Parallelogrammen zusammengesetzte Figur heißt ein direktes Diagramm.

Vereinbarung (nur für diesen Paragraphen): Seien A und B Untergruppen einer Gruppe. Dann sei $A^B := \bigvee_{x \in B} A^x$.

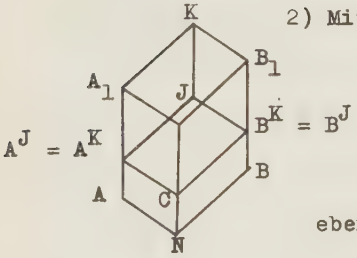
* Die Bezeichung "direkt" rührt daher, daß $C/D = A/D \times B/D$

Lemma 2.6: (Zwischenbodenlemma [15 , p.50]): Sei folgendes Diagramm direkt:



Dann gilt: 1) $A \cap B = N \trianglelefteq K$

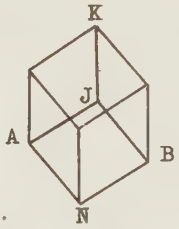
2) Mit $J := A \vee B$, $C := [A,B]N$ ist das Diagramm



ebenfalls direkt.

3) $C/N = [A/N, B/N] \leq Z(K/N)$.

Lemma 2.7: Es sei dasselbe Diagramm vorgegeben wie in Lemma 2.6, K sei eine topologische Gruppe und es gelte: $A/N \perp_t B/N$. Dann ist



ein direktes Diagramm.

Beweis: Nach Lemma 2.6,3 ist $[A/N, B/N] \leq Z(K/N)$. Daraus folgt nach Lemma 2.4 und der Definition der Orthogonalität, daß $C/N = 1$ ist, also $C = N$. Daher ist $A^K = A$, $B^K = B$, $J = AB \trianglelefteq K$ und $A, B \trianglelefteq J$.

Definition 2.8: Sei G eine topologische Gruppe mit den Ei-

genschaften

$\mathcal{K}_1$: Das Komplexprodukt zweier asn-Untergruppen von G ist eine abgeschlossene Menge;

$\mathcal{K}_2$: Wenn A,B zwei asn-Untergruppen von G sind, und wenn A im Normalisator von B liegt, dann ist der natürliche Isomorphismus zwischen AB/B und $A/A\cap B$ ein Homöomorphismus.

Dann sagen wir, G hat die Eigenschaft $\mathcal{K}$, oder $G\in\mathcal{K}$.

Bemerkung: $\mathcal{K}$ vererbt sich auf asn-Untergruppen und Faktorgruppen nach abgeschlossenen Normalteilern.

Beweis: Die Erblichkeit auf asn-Untergruppen folgt daraus, daß die Eigenschaft, asn-Untergruppe zu sein, transitiv ist.

Sei N ein abgeschlossener Normalteiler von G. $A^*=A/N$ und $B^*=B/N$ seien asn-Untergruppen von G/N. Eine Menge H^* von G/N ist genau dann abgeschlossen, wenn das volle Urbild von H^* abgeschlossen ist in G. Daher gilt: A, B asn G. Da AB das volle Urbild von $A/N\cdot B/N$ ist, und da AB nach $\mathcal{K}_1$ abgeschlossen ist, folgt: $A/N\cdot B/N$ ist abgeschlossen in G/N.

Sei B^* normal in A^*B^*. Dann ist $B\trianglelefteq AB$ und nach $\mathcal{K}_2$ gilt: $AB/B \overset{\sim}{=}_t A/A\cap B$. Da $AB/B \overset{\sim}{=}_t AB/N\big/B/N$ und $A/A\cap B \overset{\sim}{=}_t A/N\big/A\cap B/N$ ist, folgt daraus: $AB/N\big/B/N \overset{\sim}{=}_t A/N\big/A\cap B/N$, d.h. $G/N\in\mathcal{K}_2$.

Beispiele: 1) Jede diskrete Gruppe gehört zu $\mathcal{K}$.

2) Jede kompakte Gruppe gehört zu $\mathcal{K}$.

Daß eine kompakte Gruppe $\mathcal{K}_1$ erfüllt, folgt aus [7, p.51], $\mathcal{K}_2$ folgt aus [9, S. 134].

Satz 2.9: Seien A und B zwei topologisch orthogonale asn-Untergruppen einer topologischen Gruppe, $J := \overline{A \vee B} \in \mathcal{K}$. Dann sind A und B vertauschbar.

Beweis (analog Wielandts Beweis in [15, §14]):

1) Reduktion auf den Fall, daß jeder Normalteiler von J, der in dem Komplexprodukt AB liegt, gleich 1 ist.

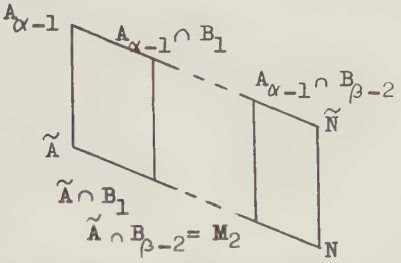
Wenn $N_1, N_2 \trianglelefteq J$ sind und $N_1, N_2 \subseteq AB$, so gilt: $N_1N_2 \trianglelefteq J$ und $N_1N_2 \subseteq N_1AB = AN_1B \subseteq A(AB)B = AB$. Daraus folgt, daß es genau einen größten Normalteiler N von J gibt, der in AB liegt. N ist abgeschlossen, denn nach Lemma 1.3 ist $\overline{N} \trianglelefteq J$, und wegen $J \in \mathcal{K}_1$ ist $AB = \overline{AB} \supseteq \overline{N}$, daher $N \geq \overline{N} \geq N$. Aus $A \perp_t B$ folgt nach Lemma 2.2: $AN/N \perp_t BN/N$. Sei $K/N = K^* \trianglelefteq J/N$ und $K^* \subseteq AN/N\ BN/N$. Dann ist $K \subseteq ABN = ANB = AB$, also $K \leq N$, d.h. $K^* = 1$. Nach $\mathcal{K}_1$ sind AN und BN abgeschlossen. Daraus folgt, daß AN/N und BN/N abgeschlossen sind. Daher gilt nach dem reduzierten Satz, den wir wegen $\overline{AN/N \vee BN/N} = \overline{(A \vee B)N/N} = \overline{(A \vee B)}/N = J/N$ und $J/N \in \mathcal{K}$ anwenden können: $AN/N\ BN/N = BN/N\ AN/N$, oder $ABN = BAN$. Da N in AB liegt, folgt: $AB = ABN = BAN = BA$, also $AB = BA$.

2) Sei α (bzw. β) der Defekt von A (bzw. B) in J, und $J = {}'A_0 \rhd {}'A_1 \rhd \ldots \rhd {}'A_\alpha = A$ die Standardreihe von A in J (d.h. ${}'A_i = A^{{}'A_{i-1}}$ $(i = 1, \ldots, \alpha)$). Setze $A_i := \overline{{}'A_i}$. Dann ist die Reihe $J = A_0 \rhd A_1 \rhd \ldots \rhd A_\alpha = A$ nach Lemma 1.2 eine Subnormalreihe abgeschlossener Untergruppen von J nach A (der Fall $A_i = A_{i+1}$ scheidet deshalb aus, weil die Standardreihe eine kürzeste Subnormalreihe ist). Entsprechend sei $J = B_0 \rhd B_1 \rhd \ldots \rhd B_\beta = B$ erklärt.

Der Beweis wird durch Induktion nach $\alpha + \beta$ geführt. Wenn $\alpha \leq 1$ oder $\beta \leq 1$ ist, dann ist entweder A oder B ein Normalteiler von J, also AB = BA.

Sei $\alpha \geq 2$ und $\beta \geq 2$. Nach Lemma 2.3 ist $\overline{\bigvee_{x \in A_{\alpha-2}} A^x} = A_{\alpha-1} \perp_t B$, und ebenso $B_{\beta-1} \perp_t A$. Daraus folgt nach Induktionsvoraussetzung: $A\,B_{\beta-1} = B_{\beta-1}A = J$ und $A_{\alpha-1}B = BA_{\alpha-1} = J$.

Setze $\widetilde{N} := A_{\alpha-1} \cap B_{\beta-1}$. Wegen $A \lhd A_{\alpha-1}$ ist $A \cap B_{\beta-1} \trianglelefteq \widetilde{N}$, und entsprechend $A_{\alpha-1} \cap B \trianglelefteq \widetilde{N}$. Deshalb ist $N := (A \cap B_{\beta-1})(A_{\alpha-1} \cap B)$ normal in $\widetilde{N}$. Da J die Eigenschaft $\mathcal{K}_1$ hat, ist N abgeschlossen. Wegen $N \leq \widetilde{N} \leq \mathcal{N}A \cap \mathcal{N}B$ ist N mit A und B vertauschbar. Sei $\widetilde{A} := AN$ und $\widetilde{B} := BN$. $\widetilde{A}$ ist abgeschlossen und normal in $A_{\alpha-1}$, denn $\widetilde{N}$, $A \leq \mathcal{N}(AN) = \mathcal{N}(\widetilde{A})$, und nach dem Lemma von Dedekind ist $\widetilde{N}A = (A_{\alpha-1} \cap B_{\beta-1})A = A_{\alpha-1} \cap B_{\beta-1}A = A_{\alpha-1} \cap J = A_{\alpha-1}$. Es gilt: $A \cap B_{\beta-1} = A \cap B_{\beta-1} \cap N \leq A \cap N \leq A \cap \widetilde{N} \leq A \cap B_{\beta-1}$, also $A \cap N = A \cap B_{\beta-1}$. Daher ist $\widetilde{A} \cap \widetilde{N} = \widetilde{A} \cap A_{\alpha-1} \cap B_{\beta-1} = AN \cap B_{\beta-1} = (A \cap B_{\beta-1})N = (A \cap N)N = N$, d.h. $\widetilde{A} \cap \widetilde{N} = N$. Daraus folgt zusammen mit $B_j \trianglelefteq B_{j+1}$, daß folgendes Diagramm direkt ist:

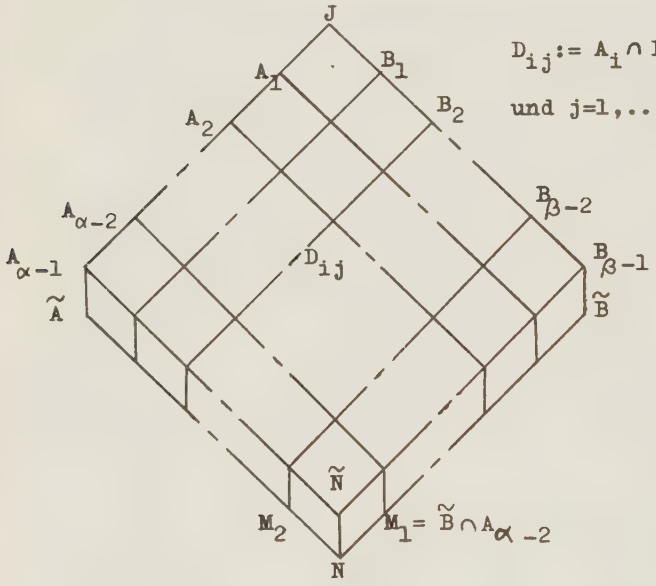


Ein entsprechendes Diagramm gilt für B.

Wenn wir alles, was wir bisher haben, zusammenfassen, erhalten wir bei fortgesetzter Anwendung

1) des Lemmas von Dedekind

2) des Lemmas, daß aus $V \trianglelefteq U$, $W \leq U$ folgt: $V \cap W \trianglelefteq W$ folgendes direkte Diagramm. Alle vorkommenden Untergruppen, symbolisiert als Gitterpunkte, sind asn-Untergruppen von J.



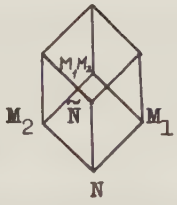
$D_{ij} := A_i \cap B_j$ für $i=1,..,\alpha-1$ und $j=1,..,\beta-1$.

Da $A_1 = \overline{\bigvee_{x \in J} A^x}$ und $B_1 = \overline{\bigvee_{x \in J} B^x}$ ist, folgt nach Lemma 2.3: $A_1 \perp_t B_1$, und nach Lemma 2.2: $A_1/A_2 \perp_t B_1/B_2$. So fortfahrend bekommen wir: $A_i/A_{i+1} \perp_t B_j/B_{j+1}$ für $i=1,2,..,\alpha-1$ und $j=1,2,...,\beta-1$.

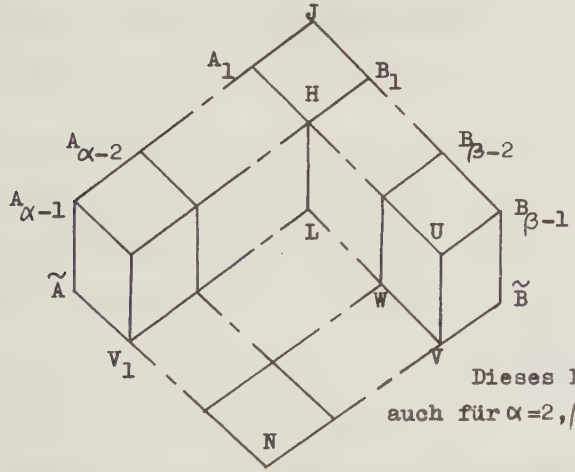
Daraus folgt: Wenn $\alpha, \beta \geq 3$ sind, dann ist $A_{\alpha-2}/A_{\alpha-1} \perp_t B_{\beta-2}/B_{\beta-1}$. Die Fälle $\alpha=2, \beta \geq 2$ und $\alpha \geq 2, \beta = 2$ stellen wir etwas zurück.

Wir betrachten die Figur in der unteren Ecke des großen Diagramms. Nach dem Isomorphiesatz ist $A_{\alpha-2}/A_{\alpha-1} \cong M_1/N$ und $B_{\beta-2}/B_{\beta-1} \cong M_2/N$. Da J die Eigenschaft $\mathfrak{K}_2$ hat, sind die

isomorphen Gruppen auch homöomorph. Also ist $M_1/N \perp_t M_2/N$. Daher läßt sich das Diagramm nach Lemma 2.7 zu folgendem direkten Diagramm -kurz als Quader bezeichnet- vervollständigen. Die neu hinzukommende Untergruppe M_1M_2 ist eine asn-Untergruppe von J.



Durch fortgesetzte Anwendung dieser Schlüsse entsteht aus dem großen Diagramm ein direktes Diagramm, das bis auf die oberen Randstreifen aus lauter Quadern zusammengesetzt ist. Wenn wir die fertigen Quader weglassen, erhalten wir also:



Dieses Diagramm gilt auch für $\alpha=2, \beta\geq 2$ und $\beta=2, \alpha\geq 2$.

Wir betrachten die rechte Eckfigur: Es gilt: $B_{\beta-1} = (B_{\beta-1})^{B_{\beta-2}} \geq \widetilde{B}^{B_{\beta-2}} \geq \overline{B'^{B_{\beta-2}}} = B_{\beta-1}$. Daher liegt $\widetilde{B}^{B_{\beta-2}}$ dicht in $B_{\beta-1}$.

Daraus folgt, daß $C := [W,\widetilde{B}]\cdot V$ dicht in U liegt; denn $\overline{C}\,\widetilde{B}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $B_{\beta-1}$, die $\widetilde{B}\,B_{\beta-2}$ enthält, also $\overline{C}\,\widetilde{B} = B_{\beta-1}$ *. Daraus folgt, daß $\overline{C} = U$ ist. Da C/V nach Lemma 2.6 im Zentrum von $B_{\beta-2}/V$ liegt, und da das Zentrum einer topologischen Gruppe abgeschlossen ist [9, S.149], liegt auch $\overline{C/V}$ im Zentrum von $B_{\beta-2}/V$. Sei C_1 das Urbild von $\overline{C/V}$. C_1 ist abgeschlossen und enthält C, daher ist $\overline{C} \leq C_1$. Daraus folgt, daß $\overline{C}/V \leq \overline{C/V}$ ist. Also ist $U/V = \overline{C}/V$ im Zentrum von $B_{\beta-2}/V$ enthalten, und daher U/V abelsch.
Da alle vertikalen Linien isomorphe Faktorgruppen darstellen, folgt daraus: H/L ist abelsch, d.h. $H' \leq L$. Wegen $L = V_1V \leq \widetilde{A}\cdot\widetilde{B} = ANBN = ANB \subseteq A(AB)B = AB$ ist $H' \subseteq AB$. H' ist als charakteristische Untergruppe des Normalteilers H ein Normalteiler von J. Daraus folgt nach 1), daß $H' = 1$ ist, also H abelsch.
Setze $R := A^B$, $S := B^A$. Nach Lemma 2.3 ist $R \perp_t S$. Da $R \leq A_1 \lhd J$ und entsprechend $S \leq B_1 \lhd J$ ist, gilt: $[R,S] \leq [A_1,B_1] \leq A_1 \cap B_1 = H$. Also ist $[R,S]$ abelsch.

Wenn T ein Normalteiler von $A \vee B$ ist, der in AB liegt, dann ist nach Lemma 1.3 der Abschluß $\overline{T}$ von T ein Normalteiler von J, der in $\overline{AB} = AB$ liegt. Nach 1) ist $\overline{T} = 1$, also auch $T = 1$. Die Behauptung von Satz 2.9 folgt dann aus

Lemma 2.10: Sei A,B subnormal in $A \vee B$; $R := A^B$ und $S := B^A$; $[R,S]$ sei abelsch; $R \perp_t S$; wenn $T \lhd A \vee B$ und $T \subseteq AB$ ist, so folge: $T = 1$. Dann ist $AB = BA$.
Der Beweis ist genau derselbe wie der des Lemmas von [15, p.64], wenn man Lemma 2.4 und Lemma 2.2 berücksichtigt.

* siehe Lemma 2.6,2

Satz 2.9': Zwei topologisch orthogonale asn-Untergruppen einer kompakten Gruppe sind vertauschbar.

Um eine andere Beschreibung der Orthogonalität topologischer Gruppen zu bekommen, definieren wir:

Def. 2.11: Seien X, Y und T abelsche topologische Gruppen. T heißt das topologische Tensorprodukt von X und Y, wenn gilt:

1) Es gibt eine bezüglich der Produkttopologie stetige, bilineare Abbildung δ von $X \times Y$ in T so, daß das Erzeugnis $\langle \delta(X \times Y) \rangle$ eine dichte Teilmenge von T ist.

2) Wenn μ eine stetige, bilineare Abbildung von $X \times Y$ in eine abelsche topologische Gruppe S ist, dann gebe es einen stetigen Homomorphismus α von T in S derart, daß $\alpha \circ \delta = \mu$ ist.

Lemma 2.12: Seien X und Y abelsche topologische Gruppen. Dann gibt es bis auf topologische Isomorphie höchstens ein topologisches Tensorprodukt T von X und Y; wir schreiben: $T = X \underset{\varepsilon}{\otimes} Y$.

Wenn X und Y diskret sind, oder wenn X und Y von einer kompakten Umgebung der Null erzeugt werden, dann existiert das topologische Tensorprodukt.

Beweis: Seien T und T' zwei topologische Tensorprodukte mit den zugehörigen bilinearen Abbildungen δ und δ'. Nach Eigenschaft 2) gibt es einen stetigen Homomorphismus α

von T nach T' mit $\alpha \circ \delta = \delta'$, und einen stetigen Homomorphismus α' von T' nach T mit $\alpha' \circ \delta' = \delta$. Daraus folgt $\delta = \alpha \circ \alpha' \circ \delta$ und $\delta' = \alpha' \circ \alpha \circ \delta'$. Daher ist $\alpha \circ \alpha' = 1$ auf $\delta(X \times Y)$. Daraus folgt wegen der Stetigkeit von $\alpha \circ \alpha'$, daß $\alpha \circ \alpha'$ die Identität auf $\overline{\langle \delta(X \times Y) \rangle} = T$ ist; dasselbe gilt für $\alpha' \circ \alpha$. Also ist α ein Homöomorphismus von T auf T'.
Der zweite Teil der Behauptung folgt aus [8], Theorem 4.5 und Theorem 4.6 .

Lemma 2.13: Seien X und Y topologische Gruppen. Dann sind die beiden Aussagen gleichwertig:

1) $X \perp_t Y$

2) $X/\overline{X'} \otimes_t Y/\overline{Y'}$ existiert und ist trivial.

Beweis: Setze $A := X/\overline{X'}$ und $B := Y/\overline{Y'}$.
Sei $X \perp_t Y$. Nach Lemma 2.2 ist $A \perp_t B$. Daraus folgt $A \otimes_t B = 0$. Sei umgekehrt $T := A \otimes_t B = 0$; wir zeigen zunächst $A \perp_t B$. Sei S' eine topologische Gruppe und $g: A \times B \longrightarrow S'$ eine stetige, bilineare Abbildung. $S := \overline{\langle g(A \times B) \rangle}$ ist nach [15, p.47] abelsch. Nach der Definition des Tensorproduktes gibt es einen stetigen Homomorphismus α von T in S mit $\alpha \circ \delta = g$. Aus $\overline{\langle \delta(A \times B) \rangle} = T = 1$ folgt, daß $g(A \times B) = 1$ ist, also $A \perp_t B$.
Sei f eine stetige, bilineare Abbildung von $X \times B$. Wir zeigen, daß f trivial ist. Dazu definieren wir eine Abbildung $g := ((x\overline{X'}, b) \longmapsto f(x,b))$. g ist wohldefiniert; denn wenn $x\overline{X'} = x_1\overline{X'}$ ist, dann ist $f(x_1, b) = f(xk, b) =$

$= f(x,b)f(k,b)$ mit $k \in \overline{X'}$. Da f stetig ist, gibt es zu jeder Umgebung U von $f(k,b)$ eine Umgebung V von k derart, daß $f(V,b) \subseteq U$ ist. Wegen $k \in \overline{X'}$ ist $V \cap X' \neq \emptyset$. Sei x' aus $V \cap X'$. Dann ist $f(x',b) = 1$, da $f(X \times B)$ abelsch ist und f bilinear; also ist $1 \in U$, und folglich $f(k,b) = 1$. Daher ist $f(x_1,b) = f(x,b)$, d.h. g ist wohldefiniert. g ist stetig und bilinear, weil f diese Eigenschaften besitzt. Daraus folgt wegen $g(A \times B) = 1$, daß auch $f(X \times B) = 1$ ist. Also ist $X \perp_t B$.

Durch eine Wiederholung dieses Schrittes bekommen wir: $X \perp_t Y$.

Aus Lemma 2.12 und Lemma 2.13 folgt:

Satz 2.14: Zwei kompakte Gruppen X und Y sind genau dann topologisch orthogonal, wenn das topologische Tensorprodukt $X/\overline{X'} \otimes_t Y/\overline{Y'}$ trivial ist.

§3 Topologisch subnormale Untergruppen

Es wurde verschiedentlich unternommen, den Begriff des Subnormalteilers dadurch zu verallgemeinern, daß nicht nur endliche, sondern auch transfinite Subnormalreihen in Betracht gezogen wurden (Heineken [3] , Robinson [10]). So heißt zum Beispiel eine Untergruppe A einer Gruppe G deszendent, wenn es eine endliche oder transfinite Kette $G = A_0 \trianglerighteq A_1 \trianglerighteq \ldots$ gibt, die bei A endet. Entsprechend verallgemeinern wir nun den Begriff der asn-Untergruppe :

Def. 3.1: A sei eine abgeschlossene Untergruppe einer topologischen Gruppe G. A heißt topologisch subnormal (in Zeichen: A tsn G), wenn es eine absteigende Kette $G = A_0 \geq A_1 \geq A_2 \geq \ldots$ von Untergruppen $A_\alpha (\alpha \in \mathcal{O})$ von G nach A gibt so, daß gilt:

1) A_α ist abgeschlossen in G und enthält A für alle $\alpha \in \mathcal{O}$,
2) $A_\alpha \trianglelefteq A_{\alpha-1}$, wenn α keine Limeszahl ist,
3) $A_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta$, wenn α Limeszahl ist,
4) Es gibt eine Ordinalzahl $\alpha_0 \in \mathcal{O}$ mit $A_{\alpha_0} = A$.

Bemerkung: Jede topologisch subnormale Untergruppe ist also abgeschlossen und deszendent. Es ist eine offene Frage, ob die Umkehrung richtig ist.

Lemma 3.2: Wenn A tsn G und B tsn A ist, dann ist B tsn G.

Lemma 3.3: Wenn A tsn G und $B \leqslant G$ ist, dann ist $A \cap B$ tsn B.

Beweis: Wenn $\{A_\alpha \mid \alpha \in \sigma\}$ eine Kette von G nach A ist mit den vier in Definition 3.1 angegebenen Eigenschaften, dann ist $\{A_\alpha \cap B \mid \alpha \in \sigma\}$ eine Kette von B nach $A \cap B$, die ebenfalls den vier Bedingungen von Definition 3.1 genügt.

Bezeichnung 3.4: Seien $A \leq B$ abgeschlossene Untergruppen einer topologischen Gruppe G. Der kleinste abgeschlossene Normalteiler von B, der A enthält, werde stets mit A^B bezeichnet. Nach Lemma 1.3 ist A^B der Abschluß von $\bigvee_{x \in B} A^x$, denn $\bigvee_{x \in B} A^x$ ist der kleinste Normalteiler von B, der A enthält.

Def. 3.5: A sei eine abgeschlossene Untergruppe einer topologischen Gruppe G. Die absteigende Kette $G = A_0 \geq A_1 \geq \ldots$ die definiert ist durch

$$A_0 = G, \quad A_\alpha = \begin{cases} A^{A_{\alpha-1}}, & \text{wenn } \alpha \text{ keine Limeszahl ist,} \\ \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta, & \text{wenn } \alpha \text{ Limeszahl ist,} \end{cases}$$

werde die Normenreihe von A genannt.

Bemerkung: Die A_α sind abgeschlossen in G. Durch Induktion macht man sich leicht klar, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ das n-te Glied der Normenreihe von A mit dem Abschluß des n-ten Gliedes der Standardreihe von A übereinstimmt .

Lemma 3.6: Seien $A \leq B$ abgeschlossene Untergruppen von G. Dann gilt:

1) $A_\alpha \leq B_\alpha$, wobei A_α (bzw. B_α) das α-te Glied der Normenreihe von A (bzw. von B) ist.

2) Für alle kompakten Normalteiler N von G ist

$A^{B}N = (AN)^{BN}$.

Beweis: a) Behauptung 1) beweisen wir durch transfinite Induktion. Für $\alpha = 0$ gilt: $A_0 = B_0 = G$. Wenn α Limeszahl ist, dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $B_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} B_\beta \geq \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta = A_\alpha$, also $B_\alpha \geq A_\alpha$. Wenn α keine Limeszahl ist, dann ist $B_{\alpha-1} \geq A_{\alpha-1}$. Daraus folgt: $A_{\alpha-1} \cap B_\alpha$ ist wegen der Abgeschlossenheit von B_α in G und wegen $B_\alpha \trianglelefteq B_{\alpha-1}$ ein abgeschlossener Normalteiler von $A_{\alpha-1}$, der A enthält. Daher ist A_α in $A_{\alpha-1} \cap B_\alpha \leq B_\alpha$ enthalten, also $A_\alpha \leq B_\alpha$.

b) Weil $A \leq A^{B} \trianglelefteq B$ ist, gilt $AN \leq A^{B}N \trianglelefteq BN$. Da N ein kompakter Normalteiler von G ist und A^{B} abgeschlossen ist, ist nach Lemma 1.10 auch $A^{B}N$ abgeschlossen in G; also gilt $(AN)^{BN} \leq A^{B}N$.

Da $(AN)^{BN}$ ein abgeschlossener Normalteiler von BN ist, gilt $A \leq (AN)^{BN} \cap B \trianglelefteq B$. Daher ist $A^{B} \leq (AN)^{BN} \cap B$. Daraus folgt $A^{B}N \leq (AN)^{BN}$. Also gilt die Gleichheit.

Lemma 3.7: Eine abgeschlossene Untergruppe A einer topologischen Gruppe G ist genau dann topologisch subnormal in G, wenn die Normenreihe von A bei A endigt.

Beweis: Sei A tsn G, $G = B_0 \geq B_1 \geq \ldots$ eine absteigende Kette wie in Definition 3.1 und $B_{\beta_0} = A$. A_α sei das α-te Glied der Normenreihe von A. Wenn man mit diesen Bezeichnungen Teil a) des letzten Beweises noch einmal durchliest, bekommt man: Für jede Ordinalzahl α ist $A_\alpha \leq B_\alpha$. Aus diesem Ergebnis folgt: $A \leq A_{\beta_0} \leq B_{\beta_0} = A$, also $A_{\beta_0} = A$.

Wenn es umgekehrt ein α gibt, so daß $A_\alpha = A$ ist, dann genügt die Normenreihe von A den Bedingungen 1) bis 4) von Definition 3.1. Daher ist A tsn G.

Satz 3.8: Der Durchschnitt beliebig vieler topologisch subnormaler Untergruppen A^i ($i \in I$) einer topologischen Gruppe G ist topologisch subnormal in G.

Beweis: Sei $A := \bigcap_I A^i$. A ist als Durchschnitt abgeschlossener Untergruppen von G eine abgeschlossene Untergruppe von G. Da A^i tsn G ist, gibt es eine Ordinalzahl α_i so, daß das α_i-te Glied der Normenreihe von A^i gleich A^i ist, d.h. $A^i = A^i_{\alpha_i}$. Es gibt eine Ordinalzahl $\alpha_0 \geq \alpha_i$ für alle $i \in I$. Nach Lemma 3.6 ist $A_{\alpha_0} \leq A^i_{\alpha_0} = A^i$ für alle $i \in I$. Daraus folgt: $A \leq A_{\alpha_0} \leq \bigcap_{i \in I} A^i_{\alpha_0} = \bigcap_{i \in I} A^i = A$, also $A_{\alpha_0} = A$.

Bemerkung: Offensichtlich ist der Begriff "tsn-Untergruppe" eine Verallgemeinerung des Begriffs "asn-Untergruppe". Eine andere Möglichkeit, diesen Begriff zu verallgemeinern, stellt die folgende Definition dar:
Eine abgeschlossene Untergruppe einer topologischen Gruppe heißt durchschnitt-subnormal, wenn sie Durchschnitt von asn-Untergruppen von G ist. Aus dem Beweis des letzten Satzes folgt, da man nun $\alpha_0 = \omega$ wählen kann: Sei A abgeschlossene Untergruppe von G, A_n das n-te Glied der Normenreihe von A ($n \in \mathbb{N}$). Dann gilt:

A ist genau dann durchschnitt-subnormal, wenn $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ist. Insbesondere ist jede durchschnitt-subnormale Untergruppe topologisch subnormal. Wir werden sehen, daß in kompakten Gruppen die beiden Begriffe zusammenfallen.

Lemma 3.9: Sei G eine topologische Gruppe, $\mathfrak{L}$ eine Filterbasis abgeschlossener Mengen, d.h. wenn B und B' aus $\mathfrak{L}$ sind, dann gebe es ein $B'' \in \mathfrak{L}$ mit $B'' \subseteq B \cap B'$, $\emptyset \notin \mathfrak{L}$. A sei eine kompakte Teilmenge von G oder es gebe ein kompaktes Element B_0 von $\mathfrak{L}$, und A sei abgeschlossene Teilmenge von G.
Dann gilt: $\bigcap_{B\in\mathfrak{L}} AB = A \bigcap_{B\in\mathfrak{L}} B$.
Beweis: Offensichtlich gilt $A \bigcap_{\mathfrak{L}} B \subseteq \bigcap_{\mathfrak{L}} AB$.
Umgekehrt sei $x \in \bigcap_{\mathfrak{L}} AB$. Dann ist $A_B := A \cap xB^{-1}$ nicht leer und abgeschlossen in A für alle $B \in \mathfrak{L}$. $\{A_B \mid B \in \mathfrak{L}\}$ ist eine Filterbasis abgeschlossener Mengen; denn $A_{B'} \cap A_B = A \cap xB^{-1} \cap xB'^{-1} = A \cap x(B \cap B')^{-1} \supseteq A \cap xB''^{-1} = A_{B''}$.
a) Wenn A kompakt ist, dann ist $\bigcap_{\mathfrak{L}} A_B \neq \emptyset$; es gibt also ein $a \in A \cap x(\bigcap_{\mathfrak{L}} B)^{-1}$, d.h. $a = xb^{-1}$ mit $b \in \bigcap_{\mathfrak{L}} B$, also $x = ab \in A \cdot \bigcap_{\mathfrak{L}} B$.
b) Wenn es ein kompaktes B_0 aus $\mathfrak{L}$ gibt, dann ist A_{B_0} als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge xB_0^{-1} kompakt. Da die Menge $\{A_B \mid B \in \mathfrak{L}\}$ eine Filterbasis ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A_B \subseteq A_{B_0}$ annehmen. Daraus folgt wie bei a), daß $x \in A \cdot \bigcap_{\mathfrak{L}} B$ ist.

Lemma 3.10: Sei $A \trianglelefteq G$ abgeschlossen und B tsn G; es sei ent-

weder A kompakt oder es gebe eine asn-Untergruppe C von G, die kompakt ist und B enthält. Dann ist AB tsn G.

Beweis: Wegen B tsn C asn G gibt es eine Subnormalreihe $G = B_0 \trianglerighteq B_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq B_n = C \trianglerighteq B_{n+1} \trianglerighteq \ldots\ldots$ (von B), die den Bedingungen von Definition 3.1 genügt und durch C geht. Wenn C kompakt ist, ist B_α kompakt für $\alpha \geq n$; daher gilt nach Lemma 1.10 für $\alpha \geq n$: $\overline{AB}_\alpha = AB_\alpha$. Wenn α Limeszahl ist, so gilt nach Lemma 3.9: $\bigcap_{\beta<\alpha} \overline{AB}_\beta = \bigcap_{n\leq\beta<\alpha} AB_\beta = A\bigcap_{\beta<\alpha} B_\beta = AB_\alpha = \overline{AB}_\alpha$, also $\overline{AB}_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \overline{AB}_\beta$. Ist α keine Limeszahl, dann gilt nach Lemma 1.3: $\overline{AB}_\alpha \trianglelefteq \overline{AB}_{\alpha-1}$. Die Menge $\{\overline{AB}_\alpha\}$ erfüllt folglich die vier Bedingungen von Definition 3.1, also ist AB tsn G.

Ähnlich geht man vor, wenn A kompakt ist.

Lemma 3.11: Seien A, B tsn G und $B \leq \mathcal{N}_G(A)$. $A_1 = A^G$ sei kompakt oder es gebe eine kompakte asn-Untergruppe C von G, die B enthält. Dann ist AB tsn G.

Beweis: Durch transfinite Induktion ergibt sich, daß $B \leq \mathcal{N}(A_\alpha)$ ist für alle α ($\{A_\alpha\}$ sei Subnormalreihe für A). Sei $B \leq C$ asn G, C kompakt. Wir zeigen durch transfinite Induktion, daß $A_\alpha B$ tsn G ist für alle α. Für $\alpha = 0$ ist nichts zu zeigen. Wenn $\alpha > 0$ keine Limeszahl ist, dann ist $G' := A_{\alpha-1}B$ tsn G. Da $A_\alpha \trianglelefteq A_{\alpha-1}$ und $B \leq \mathcal{N}(A_\alpha)$ ist, gilt $A_\alpha \trianglelefteq G'$. Es ist B tsn G' und $B \leq G' \cap C$ asn G'. Daraus folgt nach Lemma 3.10, daß $A_\alpha B$ tsn G' ist. Da G' tsn G ist, bekommen wir nach Lemma 3.2: $A_\alpha B$ tsn G.

Sei α Limeszahl, also $A_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta$. Da nach Induktion

für alle $\beta < \alpha$ gilt: $A_\beta B$ tsn G, ist nach Satz 3.8 $\bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta B$ tsn G und wegen Lemma 3.9 haben wir $\bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta B = (\bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta)B = A_\alpha B$. Daher ist $A_\alpha B$ tsn G.

Da A tsn G ist, gibt es ein α_o mit $A = A_{\alpha_o}$. Daher ist $AB = A_{\alpha_o} B$, also AB tsn G.

Entsprechend behandelt man den Fall, bei dem A_1 kompakt ist.

Def. 3.12: Eine topologische Gruppe heißt perfekt, wenn sie mit dem Abschluß ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmt.

Lemma 3.13: Seien U und V Untergruppen von G, U tsn $J := \overline{U \vee V}$. N sei ein abgeschlossener kompakter Normalteiler von G mit perfekter Faktorgruppe G/N, und es sei $UN = V^J N = G$. Dann ist $(U \cap V^J)N = G$.

Dieses Lemma und Aussage 1) des nächsten Satzes stammen, wenn man sie "enttopologisiert", von Heineken [3].

Beweis von Lemma 3.13: $\{U_\alpha\}$ sei die Normenreihe von U in J. Wir zeigen durch Induktion, daß für alle Ordinalzahlen α gilt: $(U_\alpha \cap V^J)N = G$. Für $\alpha = 0$ ist nichts zu beweisen.
1) Sei $\alpha = 1$. Wegen $[u,v] = u^{-1}v^{-1}uv \in U \vee U^V$ ist $[U,V^J] \leq \overline{\bigvee_{x \in J} U^x} = U^J = U_1$. Ebenso ist $[U,V^J] \leq V^J$. Daraus folgt $[U,V^J] \leq U^J \cap V^J$. Daher gilt $[U,V^J]N \leq (U^J \cap V^J)N$. Wegen der

Voraussetzung $G = UN = V^J N$ ist $G' := [G,G] = [UN, V^J N] \leq [U,V^J]N$. Wir bekommen also $G' \leq (U^J \cap V^J)N$. Da N kompakt ist und $U^J \cap V^J$ abgeschlossen ist, ist nach Lemma 1.10 auch $(U^J \cap V^J)N$ abgeschlossen; also gilt $A := \overline{G'} \leq (U^J \cap V^J)N$. Da G/N perfekt, und AN abgeschlossen ist, gilt nach Lemma 1.20: $G/N = \overline{[G/N, G/N]} = AN/N$, folglich $G = AN$. Daraus folgt: $G = AN \leq (U^J \cap V^J)N \leq G$, also $(U_1 \cap V^J)N = G$.

2) Für alle α gilt: U_α tsn J, $U_\alpha N = G$ und $\overline{U_\alpha \vee V} = J$. Wenn α eine Limeszahl ist, also $U_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} U_\beta$, dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung nach Lemma 3.9:

$G = \bigcap_{\beta<\alpha}(U_\beta \cap V^J)N = (\bigcap_{\beta<\alpha} U_\beta \cap V^J)N = (U_\alpha \cap V^J)N$, also $G = (U_\alpha \cap V^J)N$.

Wenn α keine Limeszahl ist, setze $V' := U_{\alpha-1} \cap V^J$. Wegen $U_\alpha \trianglelefteq U_{\alpha-1}$ ist $J' := \overline{V'U_\alpha} \leq U_{\alpha-1}$ und $U_\alpha{}^{J'} = U_\alpha$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $V'N = G$. Daraus folgt nach 1): $(U_\alpha{}^{J'} \cap (V')^{J'})N = G$. Da $J' \leq J$ und $V' \leq V^J$ ist, gilt: $(V')^{J'} \leq V^J$. Daher ist $G = (U_\alpha{}^{J'} \cap (V')^{J'})N \leq (U_\alpha{}^{J'} \cap V^J)N \leq G$, und wegen $U_\alpha{}^{J'} = U_\alpha$ bekommen wir schließlich, daß $(U_\alpha \cap V^J)N = G$ ist.

Satz 3.14: Seien A und B tsn-Untergruppen einer topologischen Gruppe G; $J := \overline{A \vee B}$; B^J sei kompakt, und A sei perfekt. Dann gilt:

1) $J = AB = BA$

2) J tsn G, falls B in einer kompakten tsn-Untergruppe

von G enthalten ist.

Beweis: Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Supplemente von B^J in J, die in A enthalten und in G topologisch subnormal sind, d.h. $\mathfrak{F} = \{ S \leq A \mid SB^J = J \text{ und } S \text{ tsn } G \}$. Wegen $AB^J = J$ ist $\mathfrak{F}$ nicht leer.

1) Wir zeigen, daß es genau ein minimales Element von $\mathfrak{F}$ gibt. Sei $S_1 \geq S_2 \geq \ldots$ eine absteigende wohlgeordnete Kette von Elementen aus $\mathfrak{F}$. Nach Satz 3.8 ist $\bigcap_i S_i$ tsn G, und nach Lemma 3.9 gilt wegen der Kompaktheit von B^J: $(\bigcap_i S_i)B^J = \bigcap_i S_i B^J = J$. Also ist $\bigcap_i S_i \in \mathfrak{F}$. Daher gibt es nach dem Zornschen Lemma ein minimales Element von $\mathfrak{F}$. Seien S und S' zwei minimale Elemente von $\mathfrak{F}$. Angenommen S ist von S' verschieden. Wegen der Minimalität gilt weder $S \leq S'$ noch $S' \leq S$. Daher ist $T := \overline{S \vee S'} > S', S$. Daraus folgt $S^T \cap S' < S'$, da sonst $S' \leq S^T$ gälte, woraus aber $S^T = S'S^T = T$ folgen würde im Gegensatz zu $T \neq S$ und S tsn T. Nach Lemma 1.20 gilt: $\overline{[AB^J/B^J, AB^J/B^J]} = \overline{[A,A]}\, B^J/B^J = AB^J/B^J = J/B^J$. Daher ist:

J/B^J perfekt, $SB^J = S'B^J = J$ und S' tsn J.

Wir können Lemma 3.13 anwenden und bekommen: $J = (S' \cap S^T)B^J$. Wegen $S^T \cap S' \lhd S'$ tsn G ist $S^T \cap S'$ tsn G. Folglich gehört $S' \cap S^T$ zu $\mathfrak{F}$. Das widerspricht aber der Minimalität von S'. Also ist $S = S'$.

Wenn S minimal in $\mathfrak{F}$ ist, dann muß für $x \in J$ auch S^x minimal in $\mathfrak{F}$ sein. Daher ist $S = S^x$, also $S \trianglelefteq J$.

2) Vertauschbarkeit von A und B

Wegen $S \trianglelefteq J$ und B tsn J ist nach Lemma 3.10: SB tsn J.

Da nach Lemma 3.6,1 gilt: $(SB)^J \geq SB^J = J$, muß $SB = J$ sein.

Da $A \geq S$ ist, gilt $J \supseteq AB \supseteq SB = J$, also $J = AB$.

Der zweite Teil der Behauptung folgt wegen $J = SB$ aus Lemma 3.11.

§4 Topologische Subnormalität in kompakten Gruppen

Die Untersuchungen im letzten Paragraphen zeigten, daß die Kompaktheit bei der Frage, ob die Vereinigung topologisch subnormaler Untergruppen topologisch subnormal ist, eine große Rolle spielt. Wir dürfen deshalb hoffen, in kompakten Gruppen auf diese Frage eine befriedigende Antwort zu finden. Der Schlüssel dazu ist folgendes Lemma:

Lemma 4.1: Sei G eine kompakte Gruppe, A eine abgeschlossene Untergruppe von G. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

1) A tsn G

2) AN/N asn G/N für alle $N \in \mathcal{N} := \{ N \trianglelefteq G \mid N$ abgeschlossen und G/N Liegruppe$\}$

3) $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, wobei A_k $(k \in \mathbb{N})$ das k-te Glied der Normenreihe von A in G ist.

Beweis: a) Aus 1) folgt 2). Nach Lemma 3.10 ist für $N \in \mathcal{N}$ das Produkt AN topologisch subnormal in G; daher ist nach Lemma 1.20 AN/N tsn G/N. Daraus folgt nach Lemma 1.15, daß AN/N asn G/N ist.

b) Um zu beweisen, daß 2) Aussage 3) zur Folge hat, zeigen wir: Für alle $N \in \mathcal{N}$ und alle natürlichen Zahlen k gilt:

$$(*) \qquad (AN)_k = A_k N \quad .$$

Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei (*) richtig für alle $i < k$. Dann ist $(AN)_k = (AN)^{(AN)_{k-1}} = (AN)^{A_{k-1} N}$. Nach Lemma 3.6,2 gilt: $(AN)^{A_{k-1} N} = A^{A_{k-1}} \cdot N = A_k N$: Also haben wir $(AN)_k = A_k N$.

Wenn AN/N asn G/N ist, dann ist AN asn G. Es gibt daher

für jedes $N \in \mathcal{N}$ ein $k_N \in \mathbb{N}$ mit $AN = (AN)_{k_N} = A_{k_N}N$, also $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k N = AN$. Aus Lemma 1.19 und Lemma 1.22 folgt: $A_k \leq \bigcap_{\mathcal{N}} A_k N \leq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} A_k U = A_k$, wobei $\mathcal{U}$ die Menge aller Umgebungen des Einselementes von G ist. Also ist $A_k = \bigcap_{\mathcal{N}} A_k N$ und ebenso $A = \bigcap_{\mathcal{N}} AN$. Daher gilt:
$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{\mathcal{N}} A_k N = \bigcap_{\mathcal{N}} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k N = \bigcap_{\mathcal{N}} AN = A$, also $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$.

c) Daß aus 3) wieder 1) folgt, ist klar.

Satz 4.2: Seien A und B zwei topologisch orthogonale, topologisch subnormale Untergruppen einer kompakten Gruppe G. Dann ist $AB = BA$.

Beweis: Nach Lemma 2.2 ist für alle $N \in \mathcal{N}$: $AN/N \perp_t BN/N$. Nach Lemma 4.1 ist AN/N, BN/N asn G/N. Daraus folgt nach Satz 2.9': $AN/N\ BN/N = BN/N\ AN/N$. Daher gilt $ABN = BAN$. Also $AB = \bigcap_{\mathcal{N}} ABN = \bigcap_{\mathcal{N}} BAN = BA$, folglich $AB = BA$.

Satz 4.3: Sei G eine kompakte Gruppe, A_i tsn G $(i \in I)$. Dann ist $A := \overline{\bigvee_{i \in I} A_i}$ tsn G.

Beweis: Für alle $N \in \mathcal{N}$ ist nach Lemma 4.1 $\{A_i N/N \mid i \in I\}$ eine Menge von asn-Untergruppen von G/N. Nach Satz 1.18 ist $\overline{\bigvee_{i \in I} A_i N/N}$ asn G/N. Nach Lemma 1.20 gilt $\overline{\bigvee_{i \in I} A_i N/N} = AN/N$. Also ist A tsn G.

Lemma 4.4: Sei G eine topologische Gruppe, $Z = Z(G)$, G/Z sei kompakt, A tsn G. Dann ist $\overline{AZ}/Z$ tsn G/Z .

Beweis: Sei $\{A_\alpha\}$ eine Subnormalreihe von G nach A. Durch transfinite Induktion zeigen wir $\overline{A_\alpha Z}$ tsn G. Für $\alpha = 0$ ist nichts zu zeigen. Wenn α keine Limeszahl ist, gilt nach Lemma 1.3 und Induktionsvoraussetzung: $\overline{A_\alpha Z} \trianglelefteq \overline{A_{\alpha-1} Z}$ tsn G, also $\overline{A_\alpha Z}$ tsn G.
Sei α eine Limeszahl. Wegen $A_\beta, Z \leq \mathcal{N}_G(A_\beta)$ gilt: $A_\beta \trianglelefteq \overline{A_\beta Z}$. für alle $\beta \in \mathcal{O}$. Daraus folgt $A_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta \trianglelefteq \bigcap_{\beta<\alpha} \overline{A_\beta Z} =: A^*$, also $A_\alpha \trianglelefteq A^*$. Folglich ist $\overline{A_\alpha Z} \trianglelefteq A^*$. Nach Induktion und Satz 3.8 ist A^* tsn G. Also ist $\overline{A_\alpha Z}$ tsn G. Daraus folgt $\overline{AZ}$ tsn G und schließlich $\overline{AZ}/Z$ tsn G/Z.

Hauptsatz: In jeder topologischen Gruppe mit kompakter Zentrumsfaktorgruppe bildet die Menge aller tsn-Untergruppen bezüglich $\bigcap$ und $\overline{\bigvee}$ einen vollständigen Verband.

Beweis: Sei G eine topologische Gruppe, $Z = Z(G)$, G/Z kompakt, A_i tsn G $(i \in I)$. Nach Satz 3.8 ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ tsn G. Nach Lemma 4.4 ist $\overline{A_i Z}/Z$ tsn G/Z. Daher ist nach Satz 4.3 $A' := \overline{\bigvee_{i\in I} \overline{A_i Z}/Z}$ tsn G/Z. Sei $A := \bigvee_{i\in I} A_i$. Es gilt $\overline{A_i Z}/Z \leq \overline{AZ}/Z$ für alle $i \in I$, also $A' \leq \overline{AZ}/Z$. Andererseits ist $\overline{AZ}/Z \leq \overline{\bigvee_{i\in I} A_i Z/Z} \leq A'$. Daher ist $A' = \overline{AZ}/Z$. Daraus folgt $\overline{AZ}$ tsn G. Wegen $A \trianglelefteq AZ$ ist $\overline{A} \trianglelefteq \overline{AZ}$. Also gilt $\overline{A}$ tsn G.

Def. 4.5: Eine kompakte, total unzusammenhängende Gruppe heißt pro-endlich.

Lemma 4.6: Sei G eine pro-endliche Gruppe, $N \in \mathfrak{N}$. Dann gilt:

1) G/N ist endlich

2) N ist offen

3) $\mathfrak{N}$ ist eine Umgebungsbasis von 1.

Beweis: Die Endlichkeit von G/N folgt aus Lemma 1.11. Da N abgeschlossen ist und G/N endlich, ist N offen. Da jede Umgebung von 1 nach Lemma 1.21 ein Element von $\mathfrak{N}$ enthält, ist also $\mathfrak{N}$ eine Umgebungsbasis von 1.

Bemerkung: Einen Beweis dieses Lemmas, der nicht von Lemma 1.21 Gebrauch macht, findet man zum Beispiel bei [9,S.151]. Nach [7,p.100] ist G der projektive Limes der endlichen Gruppen G/N ($N \in \mathfrak{N}$). Umgekehrt ist jeder projektive Limes endlicher Gruppen eine pro-endliche Gruppe. Daher der Name pro-endlich!

Nach Lemma 4.1 gilt: Eine abgeschlossene Untergruppe A einer pro-endlichen Gruppe G ist genau dann topologisch subnormal in G, wenn AN/N subnormal in G/N ist für alle $N \in \mathfrak{N}$. Ganz entsprechend definieren wir nach Bolker [1] :

Def. 4.7: Eine abgeschlossene Untergruppe A einer pro-endlichen Gruppe G heißt p-Sylowgruppe von G, wenn AN/N eine p-Sylowgruppe von G/N ist für alle $N \in \mathfrak{N}$.

Bemerkung: Aus Satz 15 und Satz 17 von [6] folgt: In einer pro-endlichen Gruppe G gibt es zu jeder Primzahl p eine p-Sylowgruppe von G und je zwei sind konjugiert. Krull

denkt sich eine pro-endliche Gruppe G stets als Limes eines projektiven Systems $(G_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ endlicher Gruppen G_λ gegeben. Wenn wir mit φ_λ die Projektionsabbildung von G in G_λ bezeichnen, gilt: Eine abgeschlossene Untergruppe A von G ist genau dann eine p-Sylowgruppe von G, wenn $\varphi_\lambda(A)$ eine p-Sylowgruppe von $\varphi_\lambda(G)$ ist für alle $\lambda \in \Lambda$.

Satz 4.8: Sei A eine topologisch subnormale Untergruppe einer pro-endlichen Gruppe, P eine p-Sylowgruppe von G. Dann ist $A \cap P$ eine p-Sylowgruppe von A.

Beweis: Da AN/N subnormal in G/N ist, und der Satz für endliche Gruppen richtig ist, ist $AN/N \cap PN/N =: S_N$ eine p-Sylowgruppe von AN/N. Sei $M \leq N$ $(M, N \in \mathfrak{N})$ und ϕ_N^M der natürliche Homomorphismus von G/M auf G/N. Dann gilt:

$\phi_N^M(S_M) = \phi_N^M(AM/M \cap PM/M) \leq \phi_N^M(AM/M) \cap \phi_N^M(PM/M) = AN/N \cap PN/N = S_N$, also $\phi_N^M(S_M) \leq S_N$. Da $\phi_N^M(S_M)$ und S_N p-Sylowgruppen von AN/N sind, ist $\phi_N^M(S_M) = S_N$.

G ist topologisch isomorph zu dem projektiven Limes $G^* := \varprojlim G/N$ der Faktorgruppen G/N $(N \in \mathfrak{N})$ bezüglich ϕ_N^M. $A^* := \varprojlim AN/N$ und $P^* := \varprojlim PN/N$ sind die den Gruppen A und P entsprechenden Untergruppen von G^*. Wir setzen $S^* := \varprojlim S_N$. Dann ist $S^* \leq A^* \cap P^*$. Sei $\phi_N : G^* \longrightarrow G/N$ die Projektionsabbildung. Nach [2, p. 218] gilt: $\phi_N(A^* \cap P^*) \leq \phi_N(A^*) \cap \phi_N(P^*) = AN/N \cap PN/N = S_N = \phi_N(S^*)$, also $\phi_N(A^* \cap P^*) \leq \phi_N(S^*)$. Daher ist $A^* \cap P^* \leq S^*$, also $A^* \cap P^* = S^*$. Da $\phi_N(S^*) = S_N$ für alle $N \in \mathfrak{N}$ eine p-Sylowgruppe von

$\phi_N(A^*) = AN/N$ ist, ist S^* eine p-Sylowgruppe von $\varprojlim AN/N = A^*$. Also ist $A \cap P$ eine p-Sylowgruppe von A.

Satz 4.9: Sei A eine abgeschlossene Untergruppe einer pro-endlichen Gruppe G. Es gebe eine Folge $A = A_0 \trianglelefteq A_1 \trianglelefteq \ldots$ so, daß $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = G$ ist. Dann ist AN/N subnormal in G/N ($N \in \mathfrak{N}$).

Beweis: Nach Lemma 1.20,1 gilt, da jedes $N \in \mathfrak{N}$ kompakt und offen ist: $G = (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n})N = (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n N}) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)N = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n N$, also $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n N$. Da G/N endlich ist, gibt es ein $n_N \in \mathbb{N}$ mit $G = A_{n_N} N$. Daher ist $AN \trianglelefteq A_1 N \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq A_{n_N} N = G$ eine Subnormalreihe von AN nach G, also AN/N subnormal in G/N.

Die Umkehrung von Satz 4.9 gilt nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 4.10: Sei D die additive Gruppe der ganzen 2-adischen Zahlen. Nach [4, p.110] ist D eine pro-endliche Gruppe. c sei der Automorphismus von D, der jedes $x \in D$ in $-x$ überführt. Dann ist $C := \langle c \rangle$ eine Gruppe der Ordnung 2. G sei das semidirekte Produkt von D und C. G ist eine pro-endliche Gruppe. C ist sein eigener Normalisator in G, denn aus $(0,c)(x,c_1) = (x,c_1)(0,c_2)$ folgt $x = -x$, also, da D torsionsfrei ist, $x = 0$.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $D_k := 2^k D$ kompakt. Daher ist nach Lemma 1.10 $N_k := D_k \cdot C$ abgeschlossen in G. Da $|D_k : D_{k+1}| = 2$ und $C \cap D$ trivial ist, gilt $|N_k : N_{k+1}| = 2$. Daher ist

$N_{k+1} \lhd N_k$, also $G = N_0 \rhd N_1 \rhd N_2 \rhd \ldots$ und nach Lemma 3.9 ist $\bigcap_{k=1}^{\infty} N_k = (\bigcap_{k=1}^{\infty} D_k)\, C = C$. Also ist C topologisch subnormal und normalisatorgleich.

Literaturverzeichnis

1) E.D.Bolker, Inverse Limits of Solvable Groups
Proc. Amer. Math. Soc. 14, 147-152 (1963)

2) S.Eilenberg, N. Steenrod: Foundations of Algebraic Topology
Princeton, Univ. Press

3) H.Heineken, Eine Verallgemeinerung des Subnormalteiler-
begriffs, Arch. Math. Vol XI (1960), 244-252

4) E.Hewitt, K.A.Ross, Abstract Harmonic Analysis, Springer-
Verlag Berlin 1963

5) K.H.Hofmann, Einführung in die Theorie der Liegruppen I,
Math.Inst.Univ. Tübingen 1963 (Vorlesungsausarbeitung)

6) W.Krull, Zur Theorie der Gruppen mit Untergruppentopologie
Abh. Math. Sem. Hamburg 28 (1965) , S 50

7) D.Montgomery, L.Zippin, Topological Transformation Groups
Interscience, New York 1964

8) M.Moskowitz, Homological Algebra in Locally Compact Abelian
Groups, Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 361-404

9) L.Pontrjagin, Topologische Gruppen I, Leipzig 1957

10) D.Robinson, Joins of subnormal subgroups, Ill. J. Math.
144-168 (1965)

11) J.Roseblade, On Certain Subnormal Coalition Classes
J. Alg. 1, 132-138 (1964)

12) J.Roseblade, The Permutability of Orthogonal Subnormal
Subgroups, Math. Z. 90 (1965), 365-372

13) J.Wiegold, On direct factors in groups, J. Lond. Math.
Soc. 35 (1960), 310-320

14) H.Wielandt, Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, Math. Z. 45 (1939), 209-244

15) H.Wielandt, Topics in the Theory of Composite Groups Dept. Math. Univ. Wisconsin, Madison 1967 (lecture notes)

L e b e n s l a u f

Am 11. Oktober 1942 wurde ich, Helmut Pommer, als sechstes Kind des Oberstudienrates Dr. Otto Pommer und seiner Frau Hedwig, geb. Eller, in Traiskirchen bei Wien geboren.

Vom Herbst 1948 bis Juli 1952 besuchte ich die Volksschule in Loibichl am Mondsee und anschließend die ersten drei Jahrgänge der Hauptschule in Mondsee. Im Herbst 1955 trat ich in die dritte Klasse des Bundesrealgymnasiums in Salzburg ein. Ab Januar 1957 besuchte ich den neusprachlichen Zug des Hellensteingymnasiums in Heidenheim/Brenz. Nach dem Abitur im Frühjahr 1962 begann ich im Sommersemester 1962 in Tübingen mit dem Studium der Mathematik und Physik. Obwohl ich die Vordiplomprüfung in Mathematik ablegte (Oktober 1964), schloß ich mein Studium im Mai 1967 mit dem Staatsexamen in den Fächern Mathematik und Physik ab.

Ab Juni 1967 verwaltete ich eine Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Tübingen. In dieser Zeit entstand unter der Anleitung von Herrn Professor Dr. Helmut Wielandt die vorliegende Arbeit mit dem Thema "Subnormalität in topologischen Gruppen".

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herrn Professoren:

W. Braunbek, G. Elwert, H. Kneser, H. Krïger

R. Mühleisen, H. Salzmann, H. Schaefer, O. Tamaschke,

W. Vogel, H. Wielandt, K. Zeller.

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063